

Propriétés de la transformée de Laplace

Signal	Transformée	Région de convergence r. c.
$x(t)$	$X(s)$	R
$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Au moins $R_1 \cap R_2$
$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Version décalée de R [c. à d., s est dans la r. c. si $(s - s_0)$ est dans R]
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	r. c. « comprimée » [c. à d., s est dans la r. c. si (s/a) est dans r. c. de $X(s)$]
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) X_2(s)$	Au moins $R_1 \cap R_2$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	Au moins R
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	Au moins $R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$

$$a = -1 \Rightarrow$$

Transformées de Laplace de fonctions de base

Signal	Transformée	Région de convergence r. c.
$\delta(t)$	1	$\forall s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
$-e^{-\alpha t} u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	$\forall s$
$[\cos \omega_0 t] u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$[\sin \omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t] u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
$[e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$

Propriétés de la transformée de Fourier

signal	transformée de Fourier
$x(t)$	$X(\omega)$
$y(t)$	$Y(\omega)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(\omega) Y(\omega)$
$x(t) y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$x(t)$ réel	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \Re\{X(\omega)\} = \Re\{X(-\omega)\} \\ \Im\{X(\omega)\} = -\Im\{X(-\omega)\} \\ X(\omega) = X(-\omega) \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}$
$x_e(t) = \text{Pair}\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ réel}]$	$\Re\{X(\omega)\}$
$x_o(t) = \text{Impair}\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ réel}]$	$j\Im\{X(\omega)\}$
Dualité	
$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$	
$F(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$	
Relation de Parseval pour les signaux apériodiques	
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) ^2 d\omega$	

Transformées de Fourier de quelques fonctions de base

8

$f(t)$	$F(\omega)$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
$ t $	$\frac{-2}{\omega^3}$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{W}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$p_W(\omega)$
$p_\tau(t)$	$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$1 - \frac{ t }{\tau} \dots t < \tau$ $0 \dots t > \tau$	$\tau \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]^2$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$s\delta_T(t)$	$\omega_0 s_{\omega_0}(\omega) ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

